第13卷 第8期 计算机辅助设计与图形学学报 Vol.13,No.8
2001年8月 JOURNAL OF COMPUTER-AIDED DESIGN & COMPUTER GRAPHICS Aug.,2001


# 圆渐开线平面插值样条及其应用

姜献峰 孙 毅
(浙江工业大学机电工程学院CAD应用工程研究所 杭州 310032)

**摘 要** 利用拼接的圆渐开线实现对平面上的数据点及其切向的插值.通过解决两点及其切向的圆渐开线插值,以及在各种不同情况下的插值处理方法,提供了圆渐开线平面插值样条的生成算法.由于圆渐开线为凸曲线,其曲率与弧长成反比,因此其样条曲线对插值曲线的形状控制是有利的,并可作为圆弧样条插值方法的一种扩展.

**关键词** 圆渐开线,插值,样条曲线,算法
**中图法分类号** TP391

# Interpolation Spline with Involute of Circle and Its Application

JIANG Xian-Feng SUN Yi
(*Mechanical and Electronical Institute*, *Zhejiang University of Technology*, *Hangzhou* 310032)

**Abstract** A new spline curve is presented which interpolates given points and tangent directions with piecewise involute of circle. Each pair of adjacent points with given tangent directions are interpolated in most cases by two segments of involute of circle. Since involute of circle has many good properties such as convexity, inverse variation of curvature with arc length, the spline is advantageous for shape control, and could act as an extension of circular arc spline.

**Key words** involute of circle, interpolation, spline curve, algorithm

## 1 引 言

在曲线造型中,复杂曲线通常是用经多项式曲线段拼接构成的多项式样条曲线(如Bézier曲线、B样条、NURBS曲线等)[1],以及由特殊曲线段拼接构成的样条曲线(如圆弧样条等)[2]通过插值或逼近的方法予以生成表示的.

圆渐开线是工程中一种常用的平面曲线,被广泛地应用于凸轮外形设计、齿轮齿廓设计、螺旋槽型线设计及机构路径行进设计等[3].由于圆的渐开线是一种凸曲线,其曲率与弧长成反比[4],并且可通过其生成渐开线的圆来方便地获取.因此,利用圆渐开线进行曲线造型设计,可形成一种曲率连续渐变的平面样条曲线,并可作为圆弧样条的补充与扩展,对平面样条曲线的生成及形状控制将有一定的作用.

本文利用圆渐开线的几何性质,研究了利用圆渐开线生成平面插值样条的方法及过程,同时讨论了圆渐开线插值样条曲线的性质.作为应用实例,还给出了圆渐开线插值样条曲线与圆弧插值样条曲线的插值比较.

## 2 渐开线及其性质

### 2.1 渐开线定义及其性质

设曲线 $\overline{r}=\overline{r}(s)$ 上各点 $\overline{r}(s)$ 在曲线 $r=r(s)$ 的 $r(s)$ 处的切线上,且 $r(s)$ 与 $\overline{r}(s)$ 在 $s$ 点处的切线互相正交,则称 $\overline{r}(s)$ 为 $r(s)$ 的渐开线,如



原稿收到日期:2000-05-12;修改稿收到日期:2001-01-16.本课题得到浙江省自然科学基金(599008)资助.姜献峰,男,1963年生,副教授,主要研究方向为计算几何、计算机图形学、CAD/CAM等.孙 毅,男,1966年生,副教授,主要研究方向为CAD/CAM、工程数据库等.

图 1 所示.

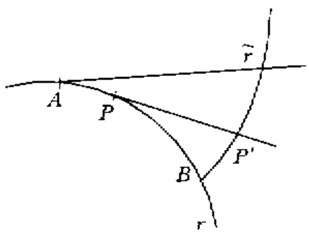



图 1　曲线 $r$ 及其渐开线 $\tilde{r}$

**性质 1.** 设曲线 $\overline{r}$ 为 $r$ 的渐开线,则

(1) $\overline{r}$ 上任一点处的法线,都是 $r$ 在某点处的切线.

(2) $A$ 是 $r$ 上一定点,若 $r$ 上任一点 $P$ 处的切线交渐开线 $\overline{r}$ 于 $P'$, $\overline{r}$ 交 $r$ 于 $B$,则必有

$$\overset{\frown}{AP}+\overline{PP'}=\overset{\frown}{AB}.$$

(3) $r$ 的渐开线 $\overline{r}$ 的任一等距曲线都是 $r$ 的渐开线.

(4) 若 $s$ 为 $r(s)$ 的弧长参数, $\boldsymbol{T}(s)$ 为 $r$ 在 $s$ 处的单位切向量,则必存在常数 $C$,使得

$$\overline{r}(s)=r(s)+(C-s)\boldsymbol{T}(s).$$

(5) 若 $r$ 为平面曲线,则其渐开线 $\overline{r}$ 也为平面曲线, $\overline{r}$ 的曲率为 $\overline{k}(s)=\dfrac{1}{C-s}$.

以上性质的证明,可由曲线论中的公式与方法直接推演获得[4],在此不作具体展开证明.

## 2.2　圆渐开线及其性质

若 $r$ 为圆,则 $\overline{r}$ 为圆渐开线.设 $O(x_0,y_0)$ 为圆心坐标,则圆渐开线方程可写为

$$\overline{r}:\begin{cases}x=R\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)+(s-s_0)\sin\left(\dfrac{s}{R}\right)+x_0\\ y=R\sin\left(\dfrac{s}{R}\right)-(s-s_0)\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)+y_0\end{cases},$$

$$s\in[s_1,s_2] \qquad (1)$$

**定理 1.** 设 $P_1,P_2$ 为平面上的两点, $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 为两单位向量,过 $P_1,P_2$ 分别作垂直于 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 的垂线 $l_1,l_2$,且交于点 $A$(如图 2 所示).若 $\overline{P_1A}>\overline{P_2A}$,则过点 $P_1,P_2$ 且在 $P_1,P_2$ 处的切向为 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 的圆渐开线 $\overline{r}$,所对应的参数 $R,s_0,s_1,s_2$ 分别为

$$\begin{cases}R=\dfrac{\overline{P_1A}-\overline{P_2A}}{2\tan\dfrac{\theta}{2}-\theta}\\ s_0=\overline{P_1A}-R\tan\dfrac{\theta}{2}\\ s_1=\dfrac{\pi}{2}R+\varphi R\\ s_2=R(\theta+\varphi)+\dfrac{\pi}{2}R\end{cases} \qquad (2)$$

其中, $\varphi$ 为垂线 $l_1$ 的倾角.

**证明.** 由于 $\overline{P_1A}>\overline{P_2A}$.在近 $P_1$ 一侧作一圆,与 $l_1,l_2$ 分别相切于点 $B_1,B_2$,则 $\overline{AB_1}=\overline{AB_2}$.由图 2 可得

$$d=R\tan\frac{\theta}{2},\quad \overset{\frown}{B_1B_2}=\theta R \qquad (3)$$

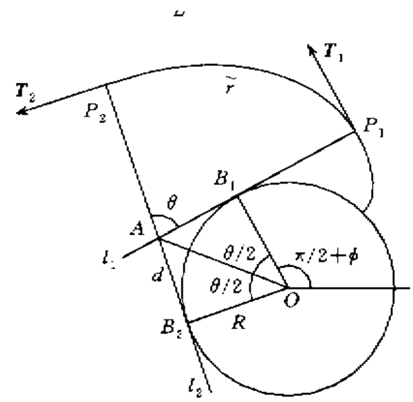



图 2　圆的渐开线性质

由性质 1 中(2)可得, $\overline{P_2B_2}-\overline{P_1B_1}=\overset{\frown}{B_1B_2}$,此时由 $\overline{P_1B_1}=\overline{P_1A}-d$, $\overline{P_2B_2}=\overline{P_2A}+d$,再将式(3)代入,即得 $R=(\overline{P_1A}-\overline{P_2A})\Big/\left(2\tan\dfrac{\theta}{2}-\theta\right)$,此时 $s_2-s_1=R\theta$, $s_1/R=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$, $s_1-s_0=\overline{P_1B_1}$,由此即得式(2)成立.　　证毕.

当 $\overline{P_1A}<\overline{P_2A}$ 时,我们同样可得类似式(2)的结果,只是此时需将整个图形先作镜像反射再作推导证明即可.

当 $\overline{P_1A}=\overline{P_2A}$ 时,由式(2)可得 $R=0$,即此时不存在一圆渐开线作为插值曲线.然后,以 $A$ 为圆心,以 $\overline{P_1A}(=\overline{P_2A})$ 为半径的圆弧即可为此时的插值曲线.必要时也可用两段光滑拼接的圆渐开线作为插值曲线,如图 4(c)所示.

**性质 2.** 平面上的点 $P_1,P_2$ 及向量 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 可形成图 2 所示的图形的充要条件为

$$\begin{cases}(P_2-P_1)\cdot\boldsymbol{T}_1>0\\ (P_2-P_1)\cdot\boldsymbol{T}_2>0\end{cases} \qquad (4)$$

**证明.** 由图 2 易知,形成图 2 所示的图形的充要条件为 $P_2-P_1$ 与 $\boldsymbol{T}_1$ 及 $(-\boldsymbol{T}_2)$ 延长线相交成为一个三角形,即 $(P_2-P_1)=a\boldsymbol{T}_1+b\boldsymbol{T}_2\ (a>0,b>0)$,等价于式(4).　　证毕.

因此,对任意点 $P_1,P_2$ 及向量 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$,一般不一定能形成如图 2 所示的图形,此时需用多段圆渐

开线拼合来实现插值,如图 3 所示.

## 3 曲线段的圆渐开线插值

已知点 $P,Q$ 处的单位切向 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$,现用一段或数段光滑拼接的圆渐开线插值点 $P,Q$,并使其在 $P,Q$ 处的单位切向为 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$.

当 $P,Q,\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 满足 $(Q-P)\cdot\boldsymbol{M}>0$,$(Q-P)\cdot\boldsymbol{N}>0$ 时,由性质 2 并利用定理 1,可用一段圆渐开线直接生成插值曲线.

当 $P,Q,\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 不同时满足 $(Q-P)\cdot\boldsymbol{M}>0$,$(Q-P)\cdot\boldsymbol{N}>0$ 时,需在 $P,Q$ 之间插入几个点,并定义好曲线在这些点处的切向,使之每相邻两点间都可满足性质 2,此时即可用定理 1 的方法生成每一段插值曲线,以生成最终的插值曲线. 具体过程如下:

设 $\theta$ 及 $\varphi$ 分别为 $QP$ 与 $\boldsymbol{M}$ 及 $\boldsymbol{N}$ 的交角. 由于当 $\theta>\pi$ 时,可对图形作水平方向的镜像后再作讨论,并且在实际造型过程中一般不会出现使 $QP$ 与 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{N}$ 平行的情形(因为此时的插值曲线段有可能出现多余的拐点),因此不妨令 $\theta\in(0,\pi)$.

设 $h_1,h_2$ 分别为过点 $P,Q$ 且平分角 $\theta,\varphi$ 的射线,取 $P_1,Q_1$ 分别为 $h_1,h_2$ 上的一点,$|P_1P|=|Q_1Q|=\lambda$,其中当 $\varphi>\pi$ 时,取 $\lambda=1$;当 $\varphi<\pi$ 时,取 $\lambda=0.5$.

直线 $h$ 为过 $P_1,Q_1$ 的直线,取方向 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{N}_1$ 分别为 $\boldsymbol{P_1Q_1}$ 与 $h_1$ 及 $h_2$ 与 $\boldsymbol{P_1Q_1}$ 的角平分线方向. 当 $\varphi<\pi$ 时,取 $R=\dfrac{P_1+Q_1}{2}$,$\boldsymbol{T}=\dfrac{(2Q_1-Q)-(2P_1-P)}{|(2Q_1-Q)-(2P_1-P)|}$. 此时插值 $P,Q$ 及 $M,N$ 的曲线将由端点为 $P,P_1$, $Q,Q_1$ 及 $Q_1,P_1$(或 $R,P_1$ 及 $Q_1,R$)这几段圆渐开线拼接而成(如图 3 所示). 但当图 3(a)中的 $h_1,h$(或 $h_2,h$)的夹角十分小,或 $P_1,P$ 分别在 $h_2$ 的异侧(或 $Q_1$ 与 $Q$ 在 $h_1$ 的异侧)(如图 4(a),4(b)),或 $P_1,Q_1$ 十分接近(如图 4(c))时,插值 $P,Q$ 及 $M,N$ 的曲线将由端点为 $P,S$ 及 $S,Q$ 的两段圆渐开线拼接而成,其中 $S$ 为 $h_1$ 与 $h_2$ 的交点,曲线在点处的切向 $\boldsymbol{D}$ 为 $h_1$ 与 $h_2$ 的角平分线方向(如图 4 所示).

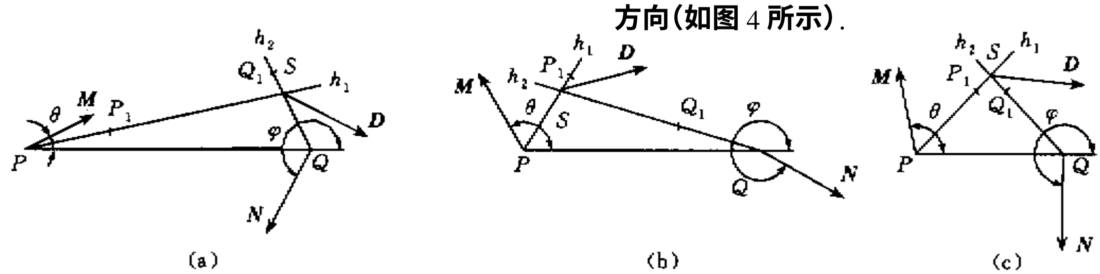



图 4 图3(a)特殊情形的处理

## 4 圆渐开线平面插值样条曲线生成

设 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 为平面上 $n+1$ 个点,$\boldsymbol{T}_0,\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 为平面中 $n+1$ 个单位向量. 现求作一样条曲线 $r$,使得 $r$ 依次过 $P_i$ 且在 $P_i$ 处的切向为 $\boldsymbol{T}_i(i=0,\cdots,n)$,其中 $P_i,P_{i+1}$ 之间的曲线段 $r_i$ 为一段或数段圆渐开线(在某些对称的情形下也可为一段圆弧).

插值曲线 $r$ 及 $P_i,P_{i+1}$ 之间的曲线段构成的 $r_i$ 生成方法,将依据以下几个过程.

Step1. 先过 $P_i$ 作与 $\boldsymbol{T}_i$ 垂直的直线,得 $l_i$.

Step2. 若 $(P_{i+1}-P_i)\cdot\boldsymbol{T}_i>0$,$(P_{i+1}-P_i)\cdot\boldsymbol{T}_{i+1}>0$,令 $l_i$ 与 $l_{i+1}$ 交于点 $A_i$.

(1) 当 $\overline{P_iA_i}\neq\overline{P_{i+1}A_i}$ 时,利用定理 1 中式(2)计算出 $R,s_0,s_1,s_2$,代入式(1),求得此时在 $P_i$ 与 $P_{i+1}$ 之间的一段圆渐开线 $r_i$.

(2) 当 $\overline{P_iA_i}=\overline{P_{i+1}A_i}$ 时,

a. 以 $A_i$ 为圆心,以 $R_i=\overline{P_iA_i}$ 为半径,以 $P_i$ 与 $P_{i+1}$ 为两端点的圆弧作为插值曲线段 $r_i$.

b. 在必要时,可用图 4(c)的方法,以两段光滑拼接的圆渐开线作为插值曲线 $r_i$.

Step3. 当 $(P_{i+1}-P_i)\cdot\boldsymbol{T}_i>0$, $(P_{i+1}-P_i)\cdot\boldsymbol{T}_{i+1}>0$ 无法同时成立时,在 $P_i$ 与 $P_{i+1}$ 之间依据图 3,4 所示的方法插入数个点,给出各插入点处的一个切向(其点及切向生成过程可参考第 3 节). 此时,对每一小段,再用 Step2 的方法生成相应的各插值曲线段,并组成插值曲线段 $r_i$.

Step4. 由 $r_i$ 构成插值曲线 $r$. 输出圆渐开线插值样条曲线 $r$.

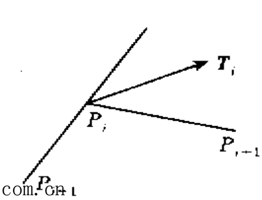


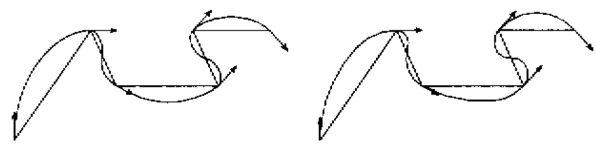

图 5 切向 $\boldsymbol{T}_i$ 的生成

当已知平面上 $n+1$ 个待插值点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$，而切向未知时，各插值点 $P_i$ 处的切向 $T_i$ 可取为射线 $P_{i+1}P_i$ 与 $P_iP_{i-1}$ 的延长线的角平分线方向，如图 5 所示．当切向 $T_i$ 按此方法生成时，插值 $P_i$，$P_{i+1}$ 与 $T_i$，$T_{i+1}$ 的圆渐开线一般仅需两段．

## 5 结　论

本文研究了利用圆渐开线进行样条曲线插值的方法．由于圆渐开线曲率与弧长成反比，计算等距曲线十分简便，因此由此生成的插值曲线具有较好的性质，便于使用．圆渐开线插值样条曲线可认为是圆弧插值样条曲线的一种推广形式，可起到对圆弧插值样条曲线扩展与改善的作用．

图 6(a)是用圆渐开线进行曲线插值的实例，其中的折线为控制多边形，箭头为在型值点处的切向．与具有同样型值点的圆弧样条插值曲线(图 6(b))相比，曲线的形状较为接近，但圆渐开线插值样条曲线的曲率较圆弧样条插值曲线曲率的阶梯函数具有较大的优点．圆渐开线插值样条曲线较圆弧样条插值曲线具有更多的插值自由度，对控制曲线形状是有作用的．圆渐开线样条作为圆弧样条的推广、扩充形式，有利于更好地解决曲线造型及形状控制问题．



(a) 圆渐开线样条插值　　(b) 圆弧样条插值

图 6　圆渐开线样条与圆弧样条插值比较

## 参 考 文 献


1 Faux I D, Pratt M J. Computational Geometry for Design and Manufacture. Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1979

2 Dong Guang-Chang, Liang You-Dong, He Yuan-Jun. Spline function fit and bi-arc approximation. Journal of Applied Mathematics, 1978, 1(1): 330－340(in Chinese)
(董光昌，梁友栋，何援军．样条函数拟合与双圆弧逼近．应用数学学报，1978，1(1)：330－340)

3 Xu Hao, *et al*. Handbooks of Mechanical Design. Beijing: China Machine Press, 1991(in Chinese)
(徐　灏，等．机械设计手册．北京 机械工业出版社，1991)

4 Su Bu-Qing, Hu He-Sheng, *et al*. Differential Geometry. Beijing: Higher Education Press, 1986(in Chinese)
(苏步青，胡和生，等．微分几何．北京 高等教育出版社，1986)